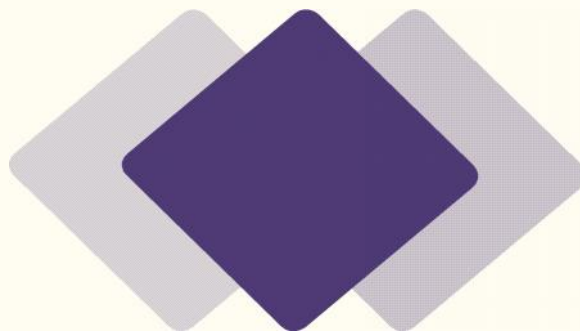




# **DASAR-DASAR** PERSAMAAN DIFERENSIAL **FRAKSIONAL**



Drs. H. Muhamad Deni Johansyah, M.M  
Herlina Napitupulu, M.Sc., Ph.D.  
Putri Naufal Amalia, S. Mat

# **DASAR-DASAR PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL**

## **Penulis :**

Drs. H. Muhamad Deni Johansyah, M.M  
Herlina Napitupulu, M.Sc., Ph.D.  
Putri Naufal Amalia, S. Mat

©Agustus 2021

ISBN : 978-623-96701-6-0

## **Tim Penyusun :**

### **Kepala Unit :**

Aggi Panigoro S.E, M.M.

### **Editor dan Desain :**

G.Guci Derry Midaya Panca S.Kom

### **Administrasi :**

Aan Dirana , A.Ma, Pust.

## **Penerbit :**

Unibi Press

Universitas Informatika dan Bisnis Indonesia

Jl. Soekarno Hatta no. 643, Bandung.

[unibipress@unibi.ac.id](mailto:unibipress@unibi.ac.id)

## **Anggota IKAPI Jawa Barat :**

396/Anggota Luar Biasa/JBA/2021



## KATA PENGANTAR

Di era kemajuan ilmu pengetahuan, informasi, dan teknologi yang semakin canggih, cara berpikir ilmiah mutlak diperlukan yang menyebabkan peran matematika menjadi sangat vital. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, banyak permasalahan yang dapat diselesaikan melalui pendekatan model matematika. Salah satu bentuk model matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari adalah kalkulus fraksional. Baru-baru ini ketertarikan terhadap kalkulus fraksional sangat meningkat yang ditunjukkan melalui banyaknya kajian yang di publikasikan baik berupa artikel dalam konferensi nasional maupun internasional, jurnal, buku, maupun karya berupa eksposisi ensiklopedia sejarah dan perkembangannya (Kiryakova, 1994). Hal itu dikarenakan perannya yang cukup penting dalam menyelesaikan berbagai permasalahan kehidupan manusia.

Persamaan diferensial berorde pecahan (fraksional) atau dikenal dengan Persamaan Diferensial Fraksional (PDF) merupakan salah satu materi dari kalkulus fraksional yang memiliki beragam implementasi dalam bidang sains dan teknologi. Penelitian-penelitian PDF saat ini banyak diantaranya yang berfokus pada berbagai varian metode penyelesaian PDF. Hal ini menjadi daya tarik tersendiri sehingga banyak orang menjadikannya sebagai salah satu tujuan mempelajari PDF. PDF yang disertai dengan kondisi awal disebut Masalah Nilai Awal Persamaan Diferensial Fraksional, sehingga PDF tersebut memiliki setidaknya satu solusi dimana solusi yang diberikan ekuivalen dengan Persamaan Integral Fraksional Volterra.

Pada buku ini dibahas mengenai konsep-konsep dasar yang diperlukan untuk menyelesaikan PDF. Pembahasan dimulai dari dasar-dasar analisis real, kalkulus fraksional, PDF, dan penyelesaian PDF Linear secara eksak menggunakan transformasi Laplace. Harapan penulis, buku ini dapat menambah wawasan mengenai dasar-dasar analisis real, kalkulus fraksional, dan PDF.

Agustus, 2021

Tim Penulis

## DAFTAR ISI

<b>KATA PENGANTAR.....</b>	<b>ii</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>iii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR.....</b>	<b>v</b>
<b>DAFTAR TABEL .....</b>	<b>vi</b>
<b>BAB I DASAR-DASAR ANALISIS REAL.....</b>	<b>1</b>
1.1. Himpunan.....	1
1.1.1. Himpunan Buka dan Himpunan Tutup .....	2
1.1.2. Himpunan Kompak .....	11
1.2. Fungsi.....	16
1.3. Sistem Bilangan Real.....	17
1.3.1. Sifat Kelengkapan Bilangan Real .....	17
1.3.2. Lingkungan .....	21
1.4. Barisan Bilangan Real.....	21
1.4.1. Limit Barisan dan Barisan Konvergen .....	23
1.4.2. Teorema-teorema Limit .....	29
1.4.3. Barisan Monoton.....	36
1.4.4. Barisan Cauchy .....	41
1.5. Limit dan Kekontinuan Fungsi .....	53
1.5.1. Limit Fungsi .....	54
1.5.2. Fungsi Kontinu.....	62
1.5.3. Fungsi Kontinu pada Interval.....	71
1.5.4. Kontinu Seragam.....	74
1.6. Konvergen Seragam.....	94
<b>BAB II KALKULUS FRAKSIONAL .....</b>	<b>106</b>
2.1. Fungsi Khusus.....	106
2.1.1. Fungsi Gamma .....	106
2.1.2. Fungsi Beta .....	114
2.1.3. Fungsi Kesalahan Komplementer (erfc) .....	119

2.1.4.	Fungsi Mittag-Leffler.....	119
2.1.5.	Fungsi Hypergeometrik Konfluen .....	122
2.2.	Transformasi Laplace.....	123
2.2.1	Metode Transformasi Laplace.....	131
2.2.2	Sifat-sifat Transformasi Laplace .....	132
2.2.3	Invers Transformasi Laplace.....	146
2.2.4	Sifat-Sifat Invers Transformasi Laplace .....	147
2.2.5	Metode Invers Transformasi Laplace.....	154
2.2.6.	Penggunaan pada Persamaan Diferensial.....	158
2.3.	Kalkulus Fraksional .....	165
2.3.1.	Integral Fraksional .....	167
2.3.2.	Turunan Fraksional .....	175
2.4.	Persamaan Integral Volterra .....	187
<b>BAB III</b>	<b>PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL .....</b>	<b>192</b>
3.1.	Persamaan Diferensial Fraksional Linear .....	193
3.2.	Masalah Nilai Awal PDF .....	193
3.3.	Hubungan Masalah Nilai Awal PDF dengan Persamaan Integral Fraksional Volterra .....	193
3.4.	Pertidaksamaan Integral.....	195
3.5.	Solusi Maksimal dan Solusi Minimal.....	198
<b>BAB IV</b>	<b>PENYELESAIAN EKSAK PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL LINEAR MENGGUNAKAN TRANSFORMASI LAPLACE.....</b>	<b>200</b>
4.1.	Transformasi Laplace.....	200
4.1.1.	Pengertian Transformasi Laplace.....	200
4.1.2.	Invers Transformasi Laplace.....	200
4.1.3.	Sifat Transformasi Laplace .....	201
4.1.4.	Transformasi Laplace dari Fungsi Sederhana .....	202
4.1.5.	Transformasi Laplace dari Integral Fraksional .....	202
4.1.6.	Transformasi Laplace dari Turunan Fraksional .....	203
4.2.	Contoh Persamaan Diferensial Fraksional Linear .....	207
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>		<b>223</b>

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Definisi Limit Fungsi .....	55
Gambar 1.2 Fungsi Kontinu di Suatu Titik.....	65
Gambar 2.1 Fungsi Gamma untuk Argumen Real.....	116
Gambar 2.2 Fungsi Kesalahan Komplementer .....	119
Gambar 2.3 Contoh Fungsi Dua Parameter Tipe Mittag-Leffler.....	120
Gambar 2.4 Turunan Fraksional $f(t) = t^2$ .....	178
Gambar 4.1 Grafik $y(x)$ untuk $a = b = 1$ dan $\alpha = 0.2, 0.6, 1, 1.4$ dan $1.8$ . .....	219
Gambar 4.2 Grafik $y(x)$ untuk $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ , dan $1$ .....	222



## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Transformasi Laplace .....	124
Tabel 2.2 Invers Transformasi Laplace .....	147
Tabel 4.1 Beberapa Fungsi $F(s)$ dan Transformasi Laplace Inversnya .....	205