

Buku Referensi



PERSAMAAN DIFERENSIAL FRAKSIONAL DAN APLIKASINYA

Dr. Muhamad Deni Johansyah, M.M.
Prof. Dr. Asep Kuswandi Supriatna, MS.
Dr. Endang Rusyaman, MS.
Khoirunnisa Rohadatul Aisy Muslihin, M.Mat.

BUKU REFERENSI

Persamaan Diferensial Fraksional dan Aplikasinya

Dr. Muhamad Deni Johansyah, M.M.
Prof. Dr. Asep Kuswandi Supriatna, MS.
Dr. Endang Rusyaman, MS.
Khoirunnisa Rohadatul Aisy Muslihin, M.Mat.

Persamaan Diferensial Fraksional dan Aplikasinya

Copyright © 2023, Dr. Muhamad Deni Johansyah, M.M.

ISBN: 978-623-96701-7-7

Editor: Khoirunnisa Rohadatul Aisy Muslihin

Tim Penulis:

Dr. Muhamad Deni Johansyah, M.M.

Prof. Dr. Asep Kuswandi Supriatna, MS.

Dr. Endang Rusyaman, MS.

Khoirunnisa Rohadatul Aisy Muslihin, M.Mat.

Diterbitkan pertama kali oleh:

Unibi Press

Anggota IKAPI, Jawa Barat, 2021

Jl. Soekarno Hatta no. 643, Bandung. Jawa Barat 40285

Tlp./SMS/Whatsapp: 0812-222-881-89

unibipress@unibi.ac.id

Hak cipta dilindungi undang–undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ke dalam bentuk apapun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk fotocopy, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya tanpa seizin tertulis dari Penerbit. Undang-undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

Kata Pengantar

Persamaan Diferensial Fraksional (PDF) adalah jenis persamaan diferensial yang mengandung turunan fraksional dari suatu fungsi yang tidak diketahui. PDF memiliki aplikasi yang luas dalam berbagai bidang, seperti fisika, kimia, teknik, matematika, dan ekonomi. Penyelesaian persamaan diferensial fraksional dapat dilakukan melalui berbagai metode, diantaranya metode analitik, metode numerik, dan metode pendekatan. Namun, dalam beberapa kasus, PDF tidak dapat diselesaikan secara analitik, sehingga metode pendekatan menjadi opsi yang paling tepat untuk menyelesaikan persamaan tersebut.

Buku referensi "Persamaan Diferensial Fraksional dan Aplikasinya" ini disusun untuk memberikan pemahaman dasar tentang turunan fraksional, sifat-sifat, serta aplikasinya dalam model pertumbuhan ekonomi. Pada buku ini dibahas mengenai dasar-dasar teori turunan fraksional dan ditunjang dengan contoh-contoh aplikasi yang diselesaikan dengan metode pendekatan seperti *Adomian Decomposition Method* (ADM), *Variational Iteration Method* (VIM), transformasi Laplace, transformasi Kamal, transformasi Kashuri Fundo, metode gabungan ADM dan transformasi Kashuri-Fundo, serta metode gabungan ADM dan transformasi Kamal.

Buku referensi ini didukung oleh Program Hibah Penelitian Unggulan *Academic Leadership Grant 1-1-6* (ALG) dengan Nomor: 1549/UN6.3.1/PT.00/2023. Penulis berharap buku ini dapat menjadi sumber referensi yang bermanfaat bagi para pembaca dalam memahami dan mengaplikasikan persamaan diferensial fraksional dalam model pertumbuhan ekonomi khususnya untuk penyelesaian dengan metode pendekatan tersebut.

Bandung, 23 Januari 2023

Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	ix
Daftar Tabel	xiii
Daftar Artikel Rujukan	xv
1 Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional Riemann-Liouville	1
1.1 Pendahuluan	1
1.2 Kajian Literatur	2
1.2.1 Kalkulus Fraksional	2
1.2.2 Integral dan Derivatif Fraksional	2
1.3 Metode Penelitian	4
1.4 Hasil dan Pembahasan	4
1.5 Simpulan	11
2 Turunan Fraksional Fungsi Polinomial dan Fungsi Eksponensial	13
2.1 Pendahuluan	13
2.2 Integral dan Turunan Fraksional	14
2.2.1 Integral Fraksional	14
2.2.2 Turunan Fraksional	15
2.3 Hasil dan Pembahasan	16
2.3.1 Fungsi Polinom	16
2.3.2 Eksponensial	20
2.4 Simpulan dan Saran	22

3	Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Bernoulli Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian	23
3.1	Pendahuluan	23
3.2	Kalkulus Fraksional	24
3.3	Metode Dekomposisi Adomian	25
3.4	Contoh Numerik	27
3.5	Simpulan	29
4	Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan <i>Adomian Decomposition Method</i> dan <i>Variational Iteration Method</i>	31
4.1	Pendahuluan	31
4.2	Tinjauan Pustaka	32
4.3	<i>Iterative Method</i>	34
	4.3.1 <i>Adomian Decomposition Method</i> (ADM)	34
	4.3.2 <i>Variational Iteration Method</i> (VIM)	35
4.4	Hasil dan Pembahasan	36
	4.4.1 Menggunakan ADM	37
	4.4.2 Menggunakan VIM	39
	4.4.3 Perbandingan Grafik Solusi	42
4.5	Simpulan	43
5	Metode Gabungan <i>Adomian Decomposition Method</i> dan Transformasi Kamal untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Fraksional Riccati	45
5.1	Pendahuluan	45
5.2	Teori Dasar	46
5.3	Metode Gabungan	47
5.4	Contoh Numerik	49
5.5	Simpulan	57
6	<i>Adomian Decomposition Method</i> dan Transformasi Kashuri-Fundo untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Fraksional Riccati	59
6.1	Pendahuluan	59
6.2	Teori Dasar	60
	6.2.1 Kalkulus Fraksional	60
	6.2.2 Metode Dekomposisi Adomian	61
6.3	Teorema Utama	63
6.4	Contoh Numerik	66
6.5	Simpulan	76

7	Aplikasi Persamaan Diferensial Fraksional pada Model Pertumbuhan Ekonomi	77
7.1	Pendahuluan	77
7.2	Objek dan Metode Penelitian	82
7.2.1	Objek Penelitian	82
7.2.2	Metode Penelitian	83
7.3	Studi Literatur	83
7.3.1	Eksistensi dan Ketunggalan	83
7.3.2	Persamaan Diferensial Fraksional Riccati	86
7.3.3	Model Pertumbuhan Ekonomi	86
7.3.4	Efek Memori pada Model Pertumbuhan Ekonomi	87
7.4	Pembahasan	88
7.4.1	Rangkuman <i>Literature Review</i>	89
7.5	Simpulan	91
8	Metode Penentuan Elastisitas Harga Menggunakan Turunan Fraksional	93
8.1	Pendahuluan	93
8.2	Kajian Teori	94
8.2.1	Kalkulus Fraksional	94
8.2.2	Integral dan Derivatif Fraksional	96
8.2.3	Elastisitas	97
8.3	Metode	99
8.4	Hasil dan Pembahasan	99
8.4.1	Perhitungan Turunan Fraksional	99
8.4.2	Metode Penentuan Elastisitas Harga Permintaan	101
8.4.3	Hasil Numerik	106
8.5	Simpulan	107
9	Model Pertumbuhan Ekonomi Alami dengan Melibatkan Efek Memori Menggunakan <i>Iterative Method</i>	109
9.1	Pendahuluan	109
9.2	Pengaruh Memori dengan Turunan dan Integral Fraksional	112
9.3	Persamaan Pertumbuhan Ekonomi dengan Efek Memori dan Penyelesaiannya	114
9.4	Penyelesaian Model Pertumbuhan Alami dengan Memori	115
9.4.1	<i>Adomian Decomposition Method (ADM)</i>	115
9.4.2	<i>Variational Iteration Method (VIM)</i>	117
9.5	Simulasi Numerik Model Pertumbuhan Alami dengan Efek Memori	118
9.6	Simpulan	120

10 Penyelesaian Persamaan Diferensial Fraksional Riccati pada Model Percepatan Pertumbuhan Ekonomi Menggunakan <i>Adomian Decomposition Method</i>	121
10.1 Pendahuluan	121
10.2 Kajian Pustaka	124
10.2.1 Integral dan Turunan Fraksional	124
10.2.2 Efek Memori pada Turunan Fraksional	125
10.2.3 <i>Adomian Decomposition Method</i>	126
10.3 Metode Penelitian	128
10.4 Hasil dan Pembahasan	128
10.4.1 Efek Memori pada Model Pertumbuhan Ekonomi	128
10.4.2 Fungsi Biaya $C(t)$ Linear	129
10.4.3 Fungsi Biaya $C(t)$ Kuadratik	130
10.4.4 Simulasi Numerik	133
10.5 Simpulan	134
11 Analisis Eksistensi dan Ketunggalan dari Solusi Pendekatan Persamaan Diferensial Fraksional Riccati pada Model Pertumbuhan Ekonomi	137
11.1 Pendahuluan	137
11.2 Teori Pendukung	138
11.2.1 Persamaan Fraksional Diferensial Riccati	138
11.2.2 Transformasi Kamal	141
11.2.3 <i>Adomian Decomposition Method (ADM)</i>	142
11.3 Hasil dan Pembahasan	144
11.3.1 Teorema Gabungan ADM-Kamal	149
11.3.2 Contoh	151
11.4 Simpulan	158
Referensi	161
Biografi Penulis	175

Daftar Gambar

3.1	Perbandingan solusi pendekatan dari Persamaan Diferensial Fraksional Bernoulli Linear menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dengan solusi eksaknya.	28
3.2	Solusi pendekatan dari Persamaan Diferensial Fraksional Bernoulli Linear menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dengan nilai α yang berbeda-beda.	28
3.3	Perbandingan solusi pendekatan dari Persamaan Diferensial Fraksional Bernoulli Tak Linear menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dengan solusi eksaknya.	29
3.4	Solusi pendekatan dari Persamaan Diferensial Fraksional Bernoulli Tak Linear menggunakan Metode Dekomposisi Adomian dengan nilai α yang berbeda-beda.	30
4.1	Grafik solusi $Y(t)$ menggunakan ADM dengan A1 ($\alpha = 1/6$), A2 ($\alpha = 2/6$), A3 ($\alpha = 3/6$), A4 ($\alpha = 4/6$), A5 ($\alpha = 5/6$), A($\alpha = 1$).	38
4.2	Grafik solusi $Y(t)$ menggunakan VIM dengan V1 ($\alpha = 1/6$), V2 ($\alpha = 2/6$), V3 ($\alpha = 3/6$), V4 ($\alpha = 4/6$), V5 ($\alpha = 5/6$), V($\alpha = 1$).	41
4.3	Perbandingan grafik solusi $Y(t)$ antara metode ADM dan VIM.	42
5.1	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional menggunakan Metode gabungan dari metode dekomposisi Adomian dan transformasi integral Kamal (5.11).	51
5.2	Grafik solusi eksak (5.10) berwarna hitam berhimpit dengan solusi pendekatan menggunakan Metode Gabungan (5.11) untuk $\alpha = 1$	51
5.3	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional menggunakan Metode gabungan dari metode dekomposisi Adomian dan transformasi integral Kamal (5.14).	53

5.4	Perbandingan solusi eksak (5.13) dengan solusi pendekatan (5.14) untuk $\alpha = 1$	54
5.5	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional menggunakan Metode gabungan dari metode dekomposisi Adomian dan transformasi integral Kamal (5.17).	56
5.6	Perbandingan solusi eksak (5.16) dengan solusi pendekatan (5.17) untuk $\alpha = 1$	56
6.1	Grafik solusi persamaan diferensial Riccati fraksional menggunakan metode dekomposisi Kashuri-Fundo (6.21). . . .	68
6.2	Perbandingan solusi eksak (6.20) dengan solusi pendekatan (6.21) untuk $\alpha = 1$	68
6.3	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan metode dekomposisi Kashuri-Fundo (6.24). . . .	70
6.4	Perbandingan solusi eksak (6.23) dengan solusi pendekatan menggunakan teorema gabungan (6.24) untuk $\alpha = 1$	70
6.5	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional Riccati menggunakan metode dekomposisi Kashuri-Fundo (6.27). . . .	73
6.6	Perbandingan solusi eksak (6.26) dengan solusi pendekatan (6.27) untuk $\alpha = 1$	73
6.7	Grafik solusi persamaan diferensial fraksional Riccati 1 menggunakan Teorema Gabungan 6.2.	75
6.8	Perbandingan solusi eksak (6.29) dengan solusi pendekatan (6.30) untuk $\alpha = 1$	76
7.1	Pemetaan kata kunci yang berkaitan dengan PDF tak linear dan pertumbuhan.	88
7.2	Pemetaan kata kunci yang berkaitan dengan PDF tak linear dan pertumbuhan ekonomi.	89
7.3	Pemetaan kata kunci yang berkaitan dengan Calculus Fraksional dan pertumbuhan ekonomi.	89
8.1	Kurva $E(p)$ dengan $\alpha = 1, \frac{99}{100}, \frac{75}{100}, \frac{50}{100}, \frac{10}{100}, \frac{1}{100}$, dan $1 \leq p \leq 4$ dengan $k_0 = 180, k_1 = 0$, dan $k_3 = -9$	106
9.1	Grafik nilai output $Y(t)$ dengan $\alpha = 0.9$ pada $Y(0) = 15, b = 3, P - a = 0.3, m = 25, v = 40$	119
9.2	Grafik nilai output $Y(t)$ dengan $\alpha = 0.4$ pada $Y(0) = 15, b = 3, P - a = 0.3, m = 25, v = 40$	119
10.1	Grafik nilai output $Y(t)$ pada model pertumbuhan ekonomi berorde fraksional untuk fungsi biaya kuadratik.	133

-
- 11.1 Grafik solusi PDF Riccati menggunakan Teorema Gabungan ADM-Kamal untuk $\alpha = 0,7$, $\alpha = 0,8$, $\alpha = 0,9$, dan $\alpha = 1$ 153
 - 11.2 Grafik solusi eksak (11.26) *line* berwarna hijau berhimpit dengan solusi pendekatan (11.27) *dot* berwarna hitam untuk $\alpha = 1$ 153
 - 11.3 Grafik solusi eksak (11.32) *line* berwarna hijau berhimpit dengan solusi pendekatan (11.35) *dot* berwarna hitam untuk $\alpha = 1$ 157